محاضرات الدفتر

القسم : رياضيات / جبر   السنة : الرابعة / جبر   المادة : شبه الزمرة 4   المحاضرة : الـ

مقدمة :

إن أول من عرّف شبه الزمرة هو العالم الفرنسي J. A. de Séguier وكان ذلك سنة 1904 لكن نظرية شبه الزمرة بدأت عام 1928 بفعل العالم الروسي حيث أثبت أن كل شبه زمرة منتهية تحوي نواة وفي عام 1970 صدرت أول مجلة علمية متخصصة في أبحاث شبه الزمرة هي semi group forum

تعاريف أولية :

شبه الزمرة : ليكن * قانون التشكيل الداخلي على المجموعة غير الخالية S .

إذا كان * تجميعي على S بأننا نقول أن S مع * أي $(S,*)$ هي شبه زمرة

أي إذا حققت * الخاصة التالية

$$\forall x,y,z \in S \; ; \; x*(y*z) = (x*y)*z$$

سوف نكتب اختصاراً xy بدلاً من $x*y$ كما سندعو العملية بالضرب تجاوزاً

إن شرط الخاصة التجميعية في شبه الزمرة S يسمح لنا أن نكتب التركيب :

$$\forall x_1, x_2, ... x_n \in S \; ; \; x_1 x_2 ... x_n$$ (بدون أقواس)

سوف نرمز لشبه الزمرة بـ S إذا لتقريب المجموعة S

سوف نرمز لشبه الزمرة الضربية بالرمز $(S,.)$ أو اختصاراً S فقط

إذا كانت شبه الزمرة تملك الخاصة التبديلية $\forall x,y \in S \quad xy = yx$

ندعو عندئذٍ شبه الزمرة S بشبه الزمرة التبديلية

أما إذا ملكت شبه الزمرة S عنصراً e يحقق الشرط التالي :

$$\forall x \in S \quad xe = ex = x$$

قلنا أن S عنصر حيادي e وندعوها عندئذٍ زمرة واحدية (monoid)

وعادةً نرمز للعنصر الحيادي بـ 1 أما إذا حقق العنصر e الشرط التالي فقط

$$\forall x \in S \; ; \; xe = x$$

فإننا نقول عن e أنه حيادي يميني وبصورة مماثلة نعرف الحيادي اليساري

واضح أنه إذا كان في أي شبه زمرة S عنصر حيادي e و e' عنصر حيادي آخر فإن $e' = e$ وذلك لأن $e = ee' = e'$

إذا لم تملك نصف الزمرة S عنصر حيادي فيمكن تزويدها به وذلك بإضافة عنصر جديد هو 1 إلى S يحقق الشرط التالي

$$\forall s \in S : s1 = 1s = s \qquad 1.1 = 1$$

سنرمز بـ S^1 للمجموعة

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{إذا كانت S تحوي 1} \\ S \cup \{1\} & \text{إذا كانت S لا تحوي 1} \end{cases}$$

إذا كانت S تحوي أكثر من عنصر وكانت تحوي العنصر k الذي يحقق الشرط

$$\forall x \in S : xk = kx = k$$

فإننا ندعو k عنصراً ماصاً أو عنصراً صفرياً (أو اختصاراً صفر S) ونرمز له غالباً بالرمز o كما يمكننا التحدث عن S أنه نصف زمرة ذات صفر ونعرف العنصر اليميني والعنصر اليساري بشكل مشابه للحيادي اليميني والحيادي اليساري

إذا ملكت نصف الزمرة S عنصراً ماصاً فهو وحيد لأنه لو كان هناك فرضاً أي لو كان يوجد عنصراً ماصاً آخر مثل k' فإن $k = kk' = k'$

إن أهمية الشرط (S تحوي أكثر من عنصر) تأتي من أن نصف الزمرة التافهة $\{a\}$ حيث $a^2 = a$ يكون فيها a حيادي وماص بنفس الوقت

إذا كانت نصف الزمرة S لا تحوي عنصراً ماصاً فمن السهل تزويدها وذلك بإضافة صفر إذا الجديد S يحقق الشرط: $\forall s \in S : so = os = o$ ويكون أيضاً $o = oo$ فنحصل على نصف زمرة $S \cup \{o\}$ ذات عنصر ماص أو ذات صفر ونرمز لها بـ S^o ويكون

$$S^o = \begin{cases} S & \text{إذا كانت S تحوي o} \\ S \cup \{o\} & \text{إذا كانت S لا تحوي o} \end{cases}$$

ملاحظة:

إن إضافة أي من العنصرين (الحيادي أو الماص) إلى نصف زمرة قد يؤدي إلى فقدان بعض خصائصها الأصلية

مثال :

لتكن G زمرة ما غير تافهة نريد من باب أولى نصف زمرة ولنضف إليها عنصر الصفر ونجعل به نصف زمرة ذات صفر أي G^0 وهي ليست زمرة وذلك لأن ليس للصفر نظير لأنه لو كان فليكن x أي إذا كان x نظير 0 لكان $0x = x0 = e \Rightarrow e = 0$ وهذا غير ممكن

نعرف نصف الزمرة الصفرية بأنها نصف الزمرة S التي تحقق الشرط : $xy = 0$; $\forall x, y \in S$

- ثم نعرف نصف الزمرة الصفرية اليسارية S التي تحقق الشرط $\forall x, y \in S ;\ xy = x$

نصف الزمرة اليمينية تحقق الشرط $\forall x, y \in S \quad xy = y$

ملاحظة :

إن نصف الزمرة S التي تحقق الشرط :

$\forall a \in S ;\ aS = Sa = S$ تكون زمرة

البرهان :-

① الخاصية التجميعية محققة لأن S نصف زمرة .

② $\forall a \in S,\ aS = S \Rightarrow \forall a \in S, \exists x \in S ;\ ax = a$

⇐ x حيادي يميني لـ S

$\forall a \in S,\ Sa = S \Rightarrow \forall a \in S, \exists y \in S ;\ ya = a$

⇐ y حيادي يساري لـ S

$x = yx = y$ لأن y حيادي يساري

(لأن x حيادي يميني)

إذن S تملك عنصر حيادي نرمز له e .

③ $e \in S,\ \forall a \in S ;\ aS = S \Rightarrow \exists a' \in S ;\ aa' = e$

$e \in S \quad \forall a \in S \quad Sa = S \Rightarrow \exists a'' \in S ;\ a''a = e$

لنبرهن أن $a' = a''$

$a'' = a''e = a''aa' = ea' = a' \Rightarrow a' = a''$

وإذا برهنا أن $a \in S$ فإنه يوجد عنصر $a' \in S$ بحيث يكون :

$e = a\bar{a} = \bar{a}a$ وبالتالي يكون لكل عنصر نظير ؛ أي أن G زمرة

أمثلة :

1) ليكن n عدداً أولياً و $S = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ، نعرف العملية $*$ على S كالتالي

$\forall s_1, s_2 \in S$; $s_1 * s_2 =$ باقي قسمة $s_1 s_2$ على n

أي :

$$s_1 * s_2 = s_1 \cdot s_2 \pmod n$$

بيّن أن $(S, *)$ نصف زمرة تبديلية